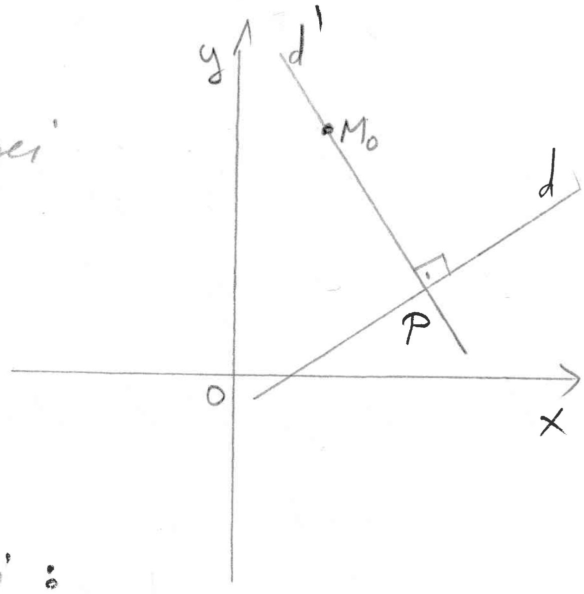
CALCULE DE DISTANȚE. ARII

Distanța de la un punct la o dreaptă este lungimea perpendicularei din punct la dreaptă



Pentru a calcula distanța de la un punct oarecare $M(x_M, y_M)$ la o dreaptă $d: ax+by+c=0$ se poate proceda parcurgând următorii pași:

1) Se scrie ecuația dreptei d', care trece prin M și este perpendiculară pe d.
2) Se determină coordonatele punctului de intersecție P al dreptelor d, d' (se rezolvă sistemul format de ecuațiile celor două drepte)
3) Se calculează distanța dintre punctele M și P, care reprezintă distanța de la M la dreapta d.

Ex. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,4)$ la dreapta de ecuație $d: x+y-1=0$

1) Scriem ec. perpendicularei prin A pe dreaptă:

$$y-y_A = m(x-3) \Rightarrow y-4 = m(x-3)$$

$m_d = -1 \Rightarrow$ panta perpendicularei este egală cu: $m \cdot m_d = -1$ și
$\Rightarrow m = \frac{-1}{m_d} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow$ ec. perpendicularei prin A este:
$y-4 = x-3 \Rightarrow x-y+1=0$

2) Determinăm coordonatele punctului de intersecție

al celor două drepte: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

$$2x \quad / \quad / \quad = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(0,1)$

3) Distanța de la punctul A la dreapta d este dată de

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Obs: 1) Distanța de la un punct $M(x_M, y_M)$ la dreapta $d: ax+by+c=0$ este determinată cu ajutorul formulei:

$$\boxed{d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

În exemplul precedent, $A(3,4)$, $d: x+y-1=0 \Rightarrow$

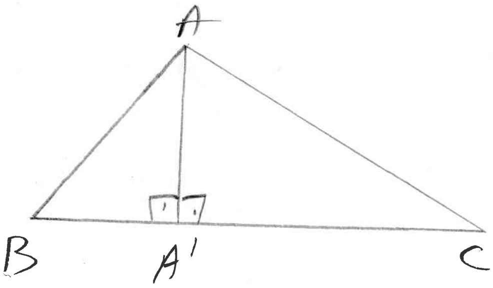
$$\Rightarrow d = \frac{|3+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

2) Pentru a afla distanța dintre două drepte paralele se procedează astfel: se alege un punct pe o dreaptă și apoi se calculează distanța de la acest punct la cealaltă dreaptă

Arii

Aria unui triunghi ABC, $S_{\triangle ABC}$ este egală cu

$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AA'}{2}$, unde AA' înseamnă distanța de la A la dreapta (BC).



Ex: Fie $A(2,3)$, $B(1,-7)$, $C(4,-1)$.
Să se calculeze $S_{\triangle ABC}$

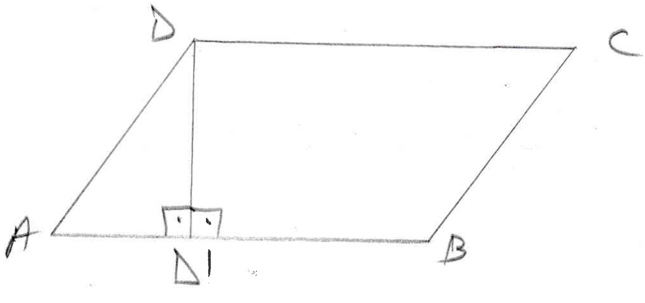
$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 3\sqrt{5}$. Scriem ecuația dreptei BC: $2x - y - 9 = 0$;

$d(A, BC) = AA' = h_a = \frac{|2\cdot 2 - 3 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = {}^{\sqrt{5})}\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

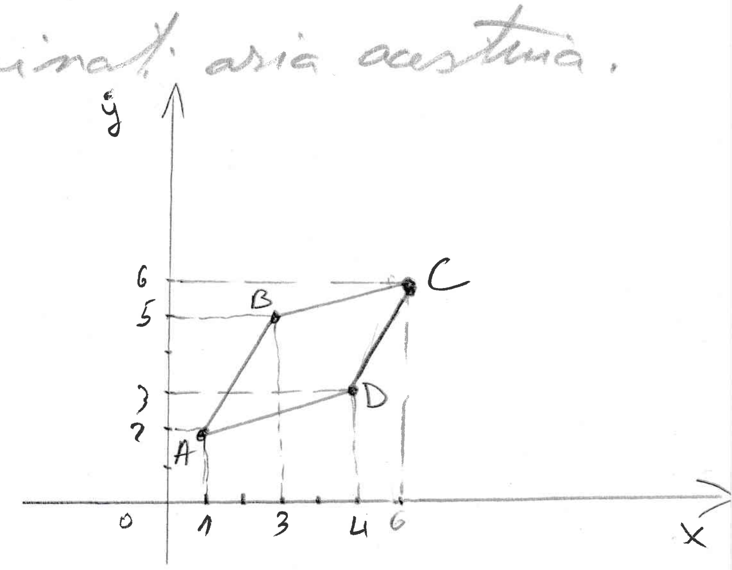
Aria cerută este: $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AA'}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\frac{3\cdot 8\cancel{5}}{\cancel{5}}}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Aria unui paralelogram ABCD, $S_{ABCD} = AB \cdot DD'$, $DD' \perp AB$

DD' reprezintă distanța de la punctul D la AB.



Ex: Punctele $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(6,6)$, $D(4,3)$ sunt vârfurile unui paralelogram. Determinați aria acestuia.



Calculăm $AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{10}$

și ec. dreptei (AD): $x - 3y + 5 = 0$

Fie $BB' \perp AD$, $B' \in AD$

$\Rightarrow BB' = \frac{|3 - 3\cdot 5 + 7|}{\sqrt{1+9}} = {}^{\sqrt{10})}\frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$

$S_{ABCD} = AD \cdot BB' = \sqrt{10} \cdot \frac{7\sqrt{10}}{10} = \frac{7 \cdot \cancel{10}^{1}}{\cancel{10}_{1}} = 7.$

Observații:

1) Dacă ABCD este DREPTUNGHI, atunci $S_{ABCD} = AB \cdot BC$

2) Dacă ABCD este PĂTRAT, atunci $S_{ABCD} = AB^2$

3) Dacă ABCD este ROMB, atunci $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$

4) Dacă ABCD este TRAPEZ, atunci $S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2}$,
unde h este distanța de la D la AB (înălțimea).