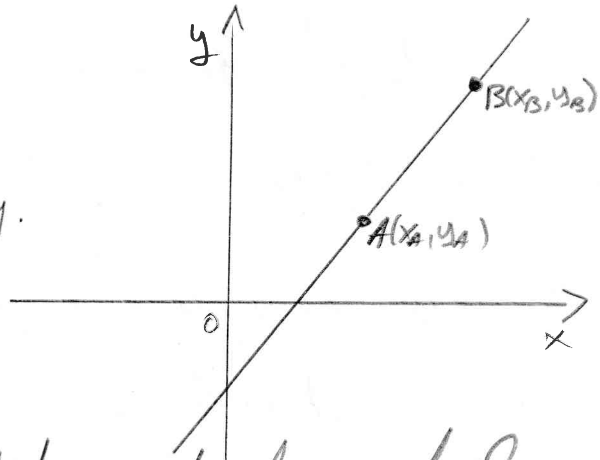
ECUAȚIA DREPTEI DETERMINATE DE DOUĂ PUNCTE DISTINCTE



Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte ($x_A \neq x_B$) în reperul cartezian xOy. Aceste puncte determină o dreaptă; panta dreptei AB este: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

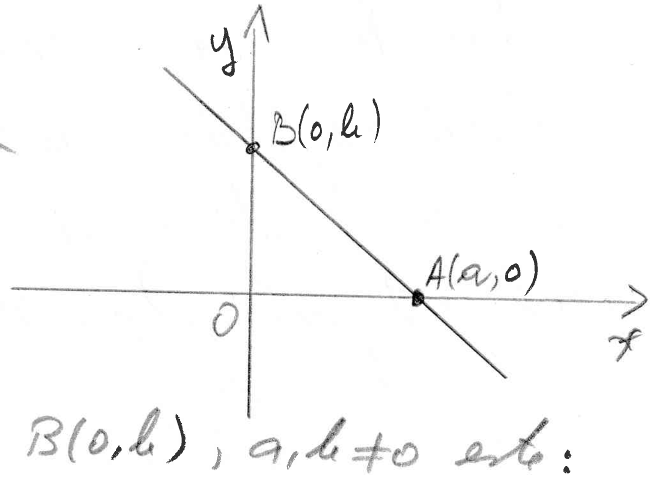
Înlocuim panta în ecuația dreptei determinată de punctul $A(x_A, y_A)$ și de pantă dată m_{AB}:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

<u>TEOREMĂ</u>: Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, ($x_A \neq x_B$) este:

$$\boxed{y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)} \text{ sau } \boxed{\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}},\ y_A \neq y_B$$

<u>ECUAȚIA DREPTEI PRIN TĂIETURI</u>:



Punctele în care o dreaptă intersectează axele de coordonate Ox și Oy se numesc <u>tăieturi</u>.

ECUAȚIA DREPTEI PRIN TĂIETURILE $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $a, b \neq 0$ este:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0}$$

Fie $A(a, 0) \in Ox$, $B(0, b) \in Oy$, $a, b \neq 0 \Rightarrow m_{AB} = \frac{b}{-a}$, ec. dreptei AB este:

$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{b}{-a}(x - a) \Rightarrow bx + ay - ab = 0 \,/ : ab$

$\Rightarrow (AB): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

Ex: Să se determine punctul $C(a;8)$, dacă acesta se află pe dreapta determinată de $A(-3,4)$, $B(5,6)$

ec. dreptei AB este: $y-4=\frac{6-4}{5+3}(x+3) \Rightarrow y-4=\frac{1}{4}(x+3)$

$C(a,8)\in(AB) \Rightarrow 8-4=\frac{1}{4}(a+3) \Rightarrow 16=a+3 \Rightarrow a=13. \Rightarrow C(13,8)$

ECUAȚIA GENERALĂ A UNEI DREPTE:

Orice dreaptă este definită de o ecuație de gradul întâi în x și y, de forma $\boxed{ax+by+c=0}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, a,b nu simultan nule $(a^2+b^2>0)$ numită ecuația carteziană generală a unei drepte

Obs: 1) Dacă $b\neq 0$, atunci ecuația se mai scrie $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ (am împărțit ec. generală la $b\neq 0$). Dacă punem $m=\frac{-a}{b}$ și $n=-\frac{c}{b} \Rightarrow$ ec. devine $y=mx+n$ ecuația explicită a dreptei de pantă m și ordonată la origine n, deci $\boxed{\text{PANTA: } m=\frac{-a}{b}}$.

2) Dacă $b=0$ și $a\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{c}{a}$ este o dreaptă paralelă cu Oy

3) Dacă $a=0$, $b\neq 0 \Rightarrow y=-\frac{c}{b}$ este o dreaptă paralelă cu Ox.

4) Două drepte $ax+by+c=0$; $a_1x+b_1y+c_1=0$ coincid dacă coeficienții celor două ecuații sunt proporționali, adică

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

Ex: 1) Să se arate că dreptele $d_1: 2x+3y-1=0$, $d_2: 4x+6y+5=0$ sunt paralele.

Aducem ec. dreptelor la forma explicită:

$d_1: 2x+3y-1=0 \,/:3 \Rightarrow \frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow m_{d_1}=-\frac{2}{3}$

$d_2: 4x+6y+5=0 \,/:6 \Rightarrow \frac{4^{2}}{6}x+y+\frac{5}{6}=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{6} \Rightarrow m_{d_2}=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ cele două drepte au aceeași pantă; $m_{d_1} = m_{d_2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 \parallel d_2$

2) Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin punctul $A(-2,3)$ și este paralelă cu dreapta $d: 3x-2y+6=0$

$d: 3x-2y+6=0 \Rightarrow m_d = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

Dreapta căutată este paralelă cu d $\Rightarrow$ au pantele egale

$\Rightarrow$ panta dreptei căutate este $m = \frac{3}{2}$

Ec. dreptei căutate: $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow {}^{2/}y - {}^{2/}3 = \frac{3}{2}(x+2)$

$\Rightarrow 2y - 6 = 3x + 6 \Rightarrow 2y - 6 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow -3x + 2y - 12 = 0 \; / \cdot (-1)$

$\Rightarrow 3x - 2y + 12 = 0$

<u>REGULĂ</u>: Un punct $M(x_0, y_0)$ aparține dreptei $d: ax+by+c=0$ dacă coordonatele sale verifică ecuația dreptei; adică:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0.$$

<u>Ex</u>: Stabiliți care din punctele $A(3,1)$, $B(2,3)$, $C(6,3)$ se află pe dreapta $d: 2x-3y-3=0$

$A(3,1) \in d \Leftrightarrow 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow A \in d.$

$B(2,3) \in d \Leftrightarrow 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 3 \neq 0 \Rightarrow B \notin d$

$C(6,3) \in d \Leftrightarrow 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow C \in d.$

<u>REGULĂ</u>: (CONCURENȚA A DOUĂ DREPTE): Punctul de intersecție a două drepte concurente se obține rezolvând sistemul format cu ecuațiile dreptelor.

Dacă $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ și $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$, atunci punctul de concurență al lor este dat de soluția sistemului: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} y=m_1x+n_1 \\ y=m_2x+n_2 \end{cases}$

Obs: 1) Dacă sistemul are soluție unică, atunci cele două drepte sunt concurente ($m_1 \neq m_2$)

2) Dacă sistemul nu are soluții, atunci cele două drepte sunt paralele ($m_1=m_2$ și $n_1 \neq n_2$)

3) Dacă sistemul are o infinitate de soluții, atunci cele două drepte coincid ($m_1=m_2$ și $n_1=n_2$).

Ex: 1) Să se determine punctul de intersecție al dreptelor $d_1: 3x-y+2=0$; $d_2: x+y-6=0$

Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$

$$4x \;/\; -4=0 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$$

$1+y-6=0 \Rightarrow y=5$

$\Rightarrow$ punctul căutat este $M(1,5)$

2) Să se arate că dreptele $d_1: x-2y+3=0$, $d_2: -x+y+1=0$ și $d_3: 2x-3y+2=0$ sunt concurente.

Pentru a arăta că trei drepte sunt concurente, determinăm punctul de intersecție a două din ele și verificăm dacă acest punct se află pe a treia dreaptă.

$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases}$

$/ \; -y+4=0 \Rightarrow y=4$

$x-8+3=0 \Rightarrow x=5$

$\Rightarrow d_1 \cap d_2 = A(5,4)$

Verificăm dacă $A \in d_3$:

$2\cdot 5-3\cdot 4+2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(5,4) \in d_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1, d_2, d_3$ sunt concurente