Rezolvarea temei - algebră

2/21 i) a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soluție: presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ astfel încât $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$(a, b) = 1$ (adică singurul divizorul comun al numerelor a și b este 1)

$\frac{a}{b}$ fracție ireductibilă

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Big|^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2 \ (1)$

Cum a și b nu au divizori comuni $\Rightarrow 2 / a \Rightarrow$

a număr par, $a = 2 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}^*$

$a^2 = 2b^2$ devine $4k^2 = 2b^2 \,/ : 2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow$

$b = 2p$ (b număr par)

avem $\begin{matrix} 2/b \\ 2/a \end{matrix} \Rightarrow$ a și b au un divizor comun: 2 contradicție cu presupunerea inițială

$\Rightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

b) $\sqrt{3} \in R \setminus Q$

presupunem că $\sqrt{3} \in Q \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, $b \neq 0$ şi $(a,b) = 1$

$3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3 / a \Rightarrow a = 3k, k \in N$

$\Rightarrow 9k^2 = 3b^2$; $3k^2 = b^2 \Rightarrow 3 / b \Rightarrow b = 3p$

$3/a$ $\Rightarrow (a,b) = 3$ contradicţie cu ipoteza $\Rightarrow \sqrt{3} \notin Q$
$3/b$

$\sqrt{3} \in R \setminus Q$. $\square$.

c) $5 + \sqrt{3} \in R \setminus Q$

presupunem prin reducere la absurd că $5 + \sqrt{3} \in Q$

$\Rightarrow 5 + \sqrt{3} = a \Rightarrow \sqrt{3} = a - 5 \in Q$ (*)

Diferenţa a 2 numere raţionale este un număr raţional

(*) dar $\sqrt{3} \notin Q \Rightarrow$ contradicţie cu $5 + \sqrt{3} \in Q \Rightarrow$

$5 + \sqrt{3} \in R \setminus Q$ $\square$

d) $3\sqrt{2} \in R \setminus Q$

presupunem prin reducere la absurd că $3\sqrt{2} \in Q$

$\Rightarrow 3\sqrt{2} = a \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{3} \in Q$

Dar $\sqrt{2} \in R \setminus Q \Rightarrow$ contradicţie $\Rightarrow 3\sqrt{2} \in R \setminus Q$ $\square$.

e) $5+11\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

presupunem prin reducere la absurd că $5+11\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 5+11\sqrt{3} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow 11\sqrt{3} = a-5 \in \mathbb{Q}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{a-5}{11} \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\}$ contradicție $\Rightarrow 5+11\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ D

ii) 1) produsul oricăror 2 numere iraționale este un număr irațional.

căutăm un contraexemplu: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \in \mathbb{Q}$

$(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 = 49-48 = 1$.

$\Rightarrow$ afirmația este falsă D.

2) suma oricăror 2 numere iraționale este un număr irațional. A

3) suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional. A

exemplu: $5+11\sqrt{3}$ (dem. mai sus)

4) produsul dintre orice număr irațional și orice număr rațional nenul este irațional. A.

5) pătratul oricărui număr irațional este număr rațional.

F $(2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

6) Orice număr irațional ridicat la puterea zero este număr natural. A (EVIDENT!)

+ Bonus:

25/24. a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}}}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$

$\sqrt{28-10\sqrt{3}}$.

METODA I: folosim formulele de calcul prescurtat $(a-b)^2, (a+b)^2$ și

$\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

Încercăm să rescriem $28-10\sqrt{3}$ sub forma $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$28 - 10\sqrt{3} = 28 - 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{\sqrt{3}}$

alegem $a = 5, b = \sqrt{3}$: $28 - 10\sqrt{3} = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3$

$= \underline{5}^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + \underline{(\sqrt{3})}^2 = (5-\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} = 5 - \sqrt{3}$

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$: $5-2\sqrt{6} = 5 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 1 = 5 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$= 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 = \underline{(\sqrt{2})}^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \underline{(\sqrt{3})}^2$

$5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$\sqrt{18+8\sqrt{2}}$:

$$18+8\sqrt{2} = 18+2\cdot4\cdot\sqrt{2} = 16+2\cdot4\cdot\sqrt{2}+2 =$$
$$= \underline{4^2} + 2\cdot4\cdot\sqrt{2} + \underline{(\sqrt{2})^2} = (4+\sqrt{2})^2$$

$$18+8\sqrt{2} = (4+\sqrt{2})^2$$

$$\sqrt{18+8\sqrt{2}} = \sqrt{(4+\sqrt{2})^2} = 4+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+4+\sqrt{2}}{x-2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \mid 9 \Leftrightarrow$$

$$x-2 \in \mathcal{D}_9 = \{\pm1, \pm3; \pm9\}$$

$x-2=1$ $\quad$ $x-2=-1$

$x=3$; $\quad$ $x=1$;

$x-2=3$ $\quad$ $x-2=-3$

$x=5$; $\quad$ $x=-1$;

$x-2=9$ $\quad$ $x-2=-9$

$x=11$; $\quad$ $x=-7$;

$$x \in \{-7; -1; 1; 3; 5; 11\}$$

METODA A ~~A~~ II-A

$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{A-\sqrt{B}}$ folosim formula RADICALILOR COMPUȘI

$A = 28$

$B = (10\sqrt{3})^2 = 100 \cdot 3 = 300$

$C^2 = A^2 - B$: $C^2 = 28^2 - 300$; $C^2 = 784 - 300$, $C^2 = 484$

$C = 22$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{28+22}{2}} - \sqrt{\frac{28-22}{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt{\frac{6}{2}} = 5-\sqrt{3}$$

$\sqrt{18+8\sqrt{2}}$

$A = 18$, $B = (8\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128$

$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{324-128} = \sqrt{196} = 14$

$$\sqrt{18+8\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18+14}{2}} + \sqrt{\frac{18-14}{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}$$

$= 4+\sqrt{2}$

analog $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$