Inecuații în mulțimea numerelor reale

1. Noțiuni introductive

Definiția 1.1. O propoziție matematică de forma $x + a < b, x \cdot a < b, x : a < b(a \neq 0), ax + b < c(>, \leq, \geq)$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, x \in \mathbb{Z}$ se numește inecuație cu o necunoscută.
Numerele a, b, c se numesc coeficienți, iar numărul întreg x se numește necunoscută(sau variabilă).

Definiția 1.2. Un număr $x_0 \in \mathbb{Z}$ se numește soluție a inecuației $a \cdot x + b > c, a \neq 0$ și $x \in \mathbb{Z}$ dacă $a \cdot x_0 + b > c$ (spunem că x_0 verifică inecuația).

Observație. A rezolva în mulțimea numerelor întregi inecuația $ax + b < c(>, \leq, \geq)$,$a \neq 0$ și $x \in \mathbb{Z}$ înseamnă a determina mulțimea soluțiilor sale.

$$S = \{x_0 | ax_0 + b > c\} \tag{1.1}$$

Definiția 1.3. Două inecuații cu o necunoscută definite pe aceeași mulțime se numesc echivalente dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație. Pentru a rezolva o inecuație, vom izola necunoscuta într-un membru al inegalității (de regulă în membrul stâng), aplicând proprietățile operațiilor cu numere întregi care păstrează relația de inegalitate.
Astfel, transformăm inecuația dată în inecuații echivalente, adică în inecuații care au aceeași mulțime de soluții. Utilizăm următoarele metode:

1) adunând sau scăzând din ambii membrii ai inecuației același număr;

2) înmulțind sau împărțind ambii membrii ai inecuației cu același număr pozitiv, păstrând sensul inegalității;

3) înmulțind sau împărțind ambii membrii ai inecuației cu același număr negativ și schimbând sensul inegalității;

Observație.

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow x \in [-a, a] \tag{1.2}$$

Observație.

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a, x \geq a \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty] \tag{1.3}$$

2. Exerciții

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $x + 1 < 5 \Rightarrow x < 5 - 1 \Rightarrow x < 4.$

b) $x + 1 < -3 \Rightarrow x < -3 - 1 \Rightarrow x < -4.$

c) $x - 3 \geq -5 \Rightarrow x \geq -5 + 3 \Rightarrow x \geq -2.$

d) $2 \cdot x < 6 \Rightarrow x < 6 : 2 \Rightarrow x < 3.$

e) $-x < -5 \Rightarrow x > 5$ (am înmulțit cu (-1) , schimbându-se astfel semnul inegalității).

f) $-4x < -12 \Rightarrow 4x > 12$ (am înmulțit cu (-1) , schimbându-se astfel semnul inegalității) $\Rightarrow x > 12 : 4 \Rightarrow x > 3$.

g) $x : (-6) < 2 \Rightarrow x < 2 \cdot (-6) \Rightarrow x < -12$.

h) $-x : 3 < -4 \Rightarrow -x < -4 \cdot 3 \Rightarrow -x < -12 \Rightarrow x > 12$ (am înmulțit cu (-1) , schimbându-se astfel semnul inegalității).

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $2x - 1 \geq 7 \Rightarrow 2x \geq 7 + 1 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 8 : 2 \Rightarrow x \geq 4$.

b) $5x - 9 < -24 \Rightarrow 5x < -24 + 9 \Rightarrow 5x < -15 \Rightarrow x < -15 : 5 \Rightarrow x < -3$.

c) $-11 + 12x < -23 \Rightarrow 12x < -23 + 11 \Rightarrow 12x < -12 \Rightarrow x < -12 : 12 \Rightarrow x < -1$.

d) $1 - 7x \geq -20 \Rightarrow -7x < -20 - 1 \Rightarrow -7x < -21 \Rightarrow 7x > 21$ (am înmulțit cu (-1) , schimbându-se astfel semnul inegalității)$\Rightarrow x > 21 : 7 \Rightarrow x > 3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $2 \cdot (x - 1) < -6 \Rightarrow x - 1 < -6 : 2 \Rightarrow x - 1 < -3 \Rightarrow x < -3 + 1 \Rightarrow x < -2$.

b) $3 \cdot (x + 1) < -18 \Rightarrow x + 1 < -18 : 3 \Rightarrow x + 1 < -6 \Rightarrow x < -6 - 1 \Rightarrow x < -7$.

c) $5 \cdot (x - 1) < 0 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$.

d) $3 + 2 \cdot (x + 2) < 5 \Rightarrow 2 \cdot (x + 2) < 5 - 3 \Rightarrow 2 \cdot (x + 2) < 5 - 3 \Rightarrow 2 \cdot (x + 2) < 2 \Rightarrow x + 2 < 2 : 2 \Rightarrow x + 2 < 1 \Rightarrow x < 1 - 2 \Rightarrow x < -1$.

e) $1 + 4 \cdot (x - 1) < -7 \Rightarrow 4 \cdot (x - 1) < -7 - 1 \Rightarrow 4 \cdot (x - 1) < -8 \Rightarrow x - 1 < -8 : 4 \Rightarrow x - 1 < -2 \Rightarrow x < -2 + 1 \Rightarrow x < -1$.

4 Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \Rightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) $|x| < -4 \Rightarrow$ inecuația nu are soluție deoarece modulul unui număr este întotdeauna mai mare sau egal cu zero.

c) $|x| > -5 \Rightarrow$ inecuația are o infinitate de soluții, deoarece modulul unui număr este întotdeauna mai mare sau egal cu zero $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

d) $|x - 1| < 4 \Rightarrow -4 < x - 1 < 4| + 1 \Rightarrow -3 < x < 5 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

5 Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a) $|2x + 6| + |6y - 42| \leq 0 \Rightarrow |2x + 6| = 0, |6y - 42| = 0$
$\Rightarrow 2x + 6 = 0, 6y - 42 = 0 \Rightarrow x = -3, y = 7$.

Modulele sunt întotdeauna mai mari sau egale cu 0.Deoarece suma lor este mai mică sau egală cu 0, deducem că singurul caz posibil este ca cele două module să fie egale cu 0.

b) $|2x+6|+|6x-42| \leq 0 \Rightarrow |2x+6|=0, |6x-42|=0$
$\Rightarrow 2x+6=0, 6x-42=0 \Rightarrow x=-3, x=7(simultan) \Rightarrow$ ecuația nu are soluție.

c) $|x^2+5x|+|y^2-y| \leq 0 \Rightarrow |x^2+5x|=0, |y^2-y|=0$
$\Rightarrow x^2+5x=0, y^2-y=0 \Rightarrow x \cdot (x+5)=0, y \cdot (y-1)=0 \Rightarrow$
$x \in \{0,-5\}, y \in \{0,1\}$.

d) $\dfrac{x-3}{|x-1|} < 0 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$. Modulul unui număr este întotdeauna mai mare sau egal cu 0. Deducem că singurul caz posibil este ca numărătorul fracției să fie negativ.