Lecția 3: Descriere și reprezentare: piramida, tetraedrul

O piramidă este definită de un poligon plan, numit bază și un punct exterior planului acestuia, numit vârful piramidei, unind vârful piramidei cu vârfurile poligonului plan.

Obs: În funcție de natura poligonului de la bază, piramidele pot fi: triunghiulare, patrulatere, hexagonale, etc.

Elementele unei piramide patrulatere

1) vârful piramidei: punctul V
2) baza piramidei: patrulaterul ABCD
3) muchiile bazei: [AB], [BC], [CD], [DA]
4) muchiile laterale: [VA], [VB], [VC], [VD]
5) înălțimea piramidei: [VO]
6) fețele laterale: ΔVAB, ΔVBC, ΔVCD, ΔVDA

Tetraedrul este determinat de 4 puncte necoplanare, numite vârfuri.

Muchii: [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]

Observații

1) Dacă proiecția vârfului unei piramide pe planul bazei este centrul cercului circumscris bazei (inscriptibile), atunci piramida se numește piramidă dreaptă.

2) O piramidă dreaptă care are baza poligon regulat se numește piramidă regulată.

3) Într-o piramidă regulată, fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea corespunzătoare bazei a unei fețe laterale se numește apotema piramidei (notată cu a_p).

Teorema lui Euler

$V + F - M = 2$: corp geometric (poliedru)

V = numărul de vârfuri

$F = f$ = numărul de fețe

$M = m$ = numărul de muchii

Lecție: geometrie: piramida

5/119 tetraedru regulat – 6 muchii
4 fețe
4 vârfuri

: relația lui Euler:

$f + v - m = 2$

$4 + 4 - 6 = 2$

Suma muchiilor $= 6 \cdot 8 = 48$ cm

6/119 piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale

8 muchii : $8m = 160$ cm $\Rightarrow m = 160 : 8$

$m = 20$ cm

baza ABCD este pătrat cu $l = 20$ cm $\Rightarrow A = l^2 = 20^2 = 400\ cm^2$

7/119 ABCD tetraedru: 4 fețe: Δ echilaterale

$l = 8\sqrt{3}$ cm

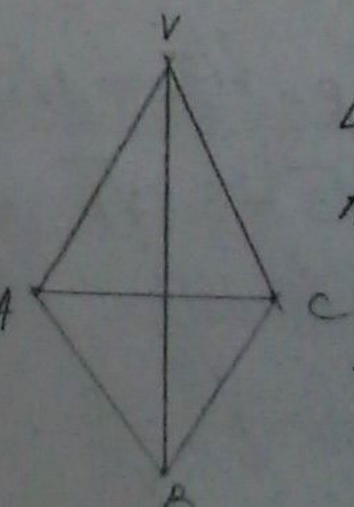
$$A_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{64 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}\ cm^2$$

$4 \cdot A_\Delta = 4 \cdot 48\sqrt{3}\ cm^2 = 192\sqrt{3}\ cm^2.$

8/119 a), b)

9/119

AB = AC = BC = 12 cm



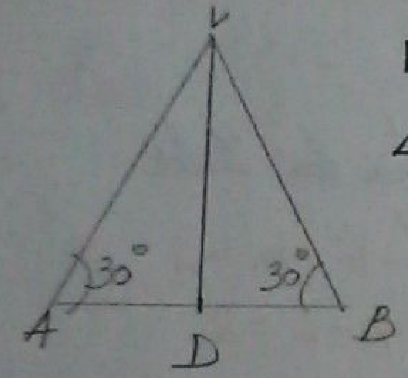
ΔABC echilateral

$$A_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\ cm^2$$

$\Rightarrow l^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \cdot 4$

$\Rightarrow l^2 = 144 \Rightarrow l = \sqrt{144} = 12$ cm

ΔVAB isoscel: $VA = VB$: $m(\sphericalangle VAB) = 30^\circ$



$VD \perp AB$

ΔVAD dreptunghic în D: din th. unghiului de $30^\circ \Rightarrow VA = 2VD$

D mijlocul lui $AB \Rightarrow AD = \frac{12}{2} = 6cm$

$\Delta VAD \overset{PITAGORA}{\Longrightarrow} VA^2 = VD^2 + AD^2$

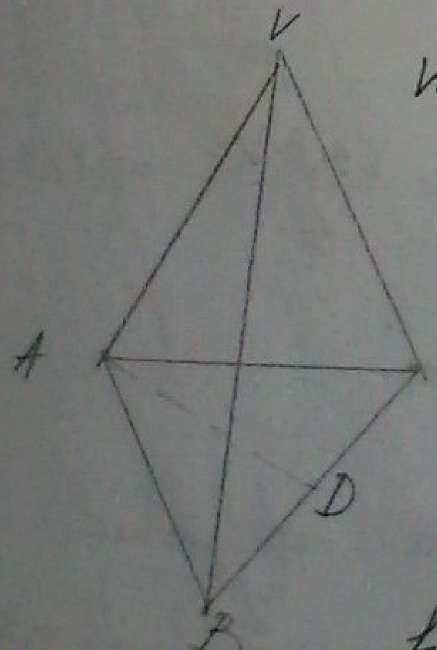
$VA = 2VD$: $(2VD)^2 = VD^2 + 6^2 \Rightarrow 4VD^2 = VD^2 + 36$

$\Rightarrow 3VD^2 = 36 \Rightarrow VD^2 = 36 : 3 \Rightarrow VD^2 = 12$

$\Rightarrow VD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} cm$

$$A_{VAB} = \frac{VD \cdot AB}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 12\sqrt{3} cm^2.$$

10/119



$VABC$: ΔABC echilateral

$R = 8\sqrt{6}$ cm

$m(\sphericalangle AVB) = 90^\circ$

$R = AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{6}$

$l\sqrt{3} = 3 \cdot 8\sqrt{6} \Rightarrow l\sqrt{3} = 24\sqrt{6}$

$\Rightarrow l = \frac{24\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{2}$

$R = \frac{l\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3R = l\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{3R}{\sqrt{3}}$; $l = R\sqrt{3}$

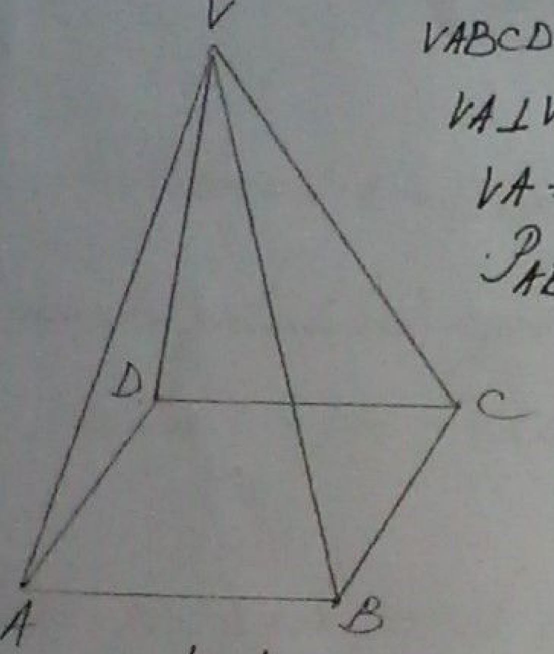
$= 8\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{18}$

c) ΔVAB dreptunghic isoscel: $VA = VB$ catete

AB = ipotenuză

$ip = c\sqrt{2} \Rightarrow c_1 = c_2 = VA = 24 cm$ □.

13/120.



VABCD piramidă patrulateră

$VA \perp VB \Rightarrow \Delta VAB$ dreptunghic isoscel

$VA = 10 cm$

P_{ABCD} :

$\Delta VAB \xRightarrow{PITAGORA} VA^2 + VB^2 = AB^2$

$\Rightarrow 10^2 + 10^2 = AB^2 \Rightarrow$

$100 + 100 = AB^2 \Rightarrow 200 = AB^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} cm$

ABCD pătrat $\Rightarrow P_{ABCD} = 4l = 4 \cdot 10\sqrt{2} = 40\sqrt{2} cm$. □.

14/120 $VABC$: $AB = AC = BC = 12 cm$

$VA \perp VB$; $VB \perp VC$, $VA \perp VC$

ΔVAB dreptunghic isoscel în V: $VA^2 + VB^2 = AB^2$

$VA^2 + VA^2 = 144 \Rightarrow 2VA^2 = 144 \Rightarrow VA^2 = 144 : 2 \Rightarrow VA^2 = 72$

$\Rightarrow VA = \sqrt{72} \Rightarrow VA = 6\sqrt{2} cm$. □.

15/120 VABCD piramidă patrulateră regulată $VA = AB = 10 cm$

ΔVAC isoscel: $VA = VC = 10 cm$

AC diag în ABCD: $AC = AB\sqrt{2} = 10\sqrt{2} cm$

Din reciproca th. lui PITAGORA $\Rightarrow VA^2 + VC^2 = AC^2$

$100 + 100 = 200 \Rightarrow \Delta VAC$ dr. isoscel în V

VA, VC catete, AC ipotenuză

$$A_{VAC} = \frac{VA \cdot VC}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50\,cm^2.$$