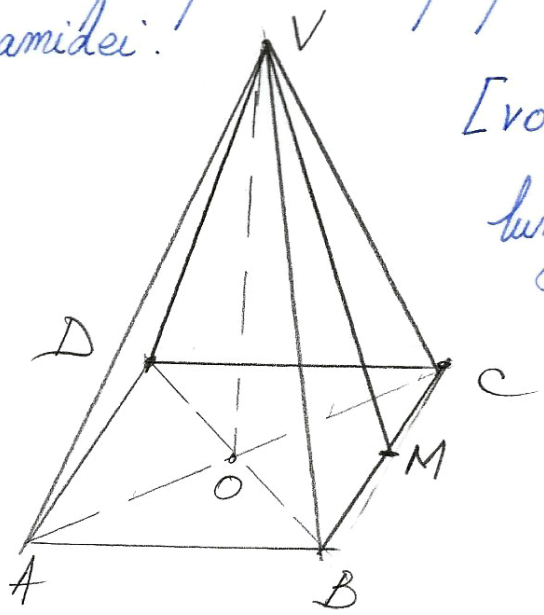
Înălțimea și apotema piramidei

Definiție: Segmentul determinat de vârful piramidei și de punctul de intersecție dintre planul bazei și perpendiculara construită din vârful piramidei pe planul bazei se numește înălțimea piramidei.



[VO] = înălțimea piramidei

lungimea înălțimii se notează cu h

$VO \perp (ABC)$

Teoremă: Într-o piramidă piciorul înălțimii coincide cu centrul bazei acesteia.

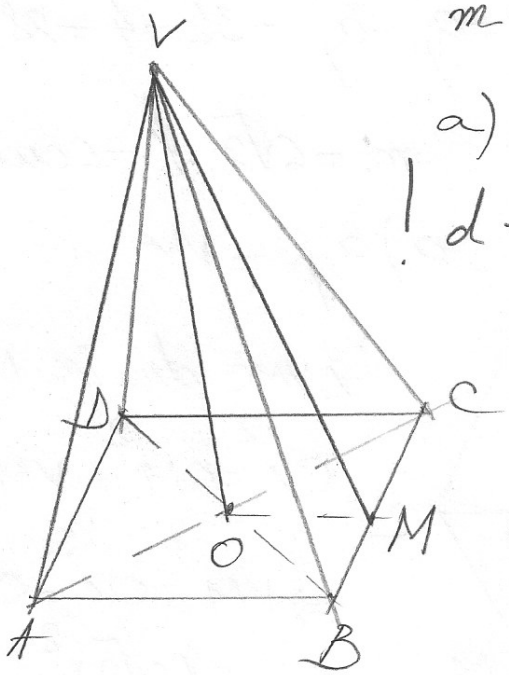
Definiție: Într-o piramidă regulată înălțimea unei fețe laterale construită din vârful piramidei se numește apotema piramidei.

[VM] este apotema piramidei VABC, corespunzătoare fetei laterale VBC.

Lungimea apotemei piramidei se notează cu ap.

Înălțimea piramidei

5/130



$m = 2\sqrt{7}$ cm, $d = AC = BD = 8$ cm

a) $VO = h$, $VO \perp (ABC)$

! $d = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow l = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm;

$OM = a_b = \frac{l}{2} = 2\sqrt{2}$ cm

ΔVMC dr în M: $CV^2 = CM^2 + VM^2 \Rightarrow VM^2 = CV^2 - CM^2$

$= (2\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 28 - 8 = 20$

$\Rightarrow VM = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm $= a_p$ b)

ΔVOM: $VO^2 + OM^2 = VM^2$

$h^2 + a_b^2 = a_p^2 \Rightarrow h^2 = a_p^2 - a_b^2 = 20 - 8 = 12$

$\Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm □

6/130. $VABCD$: $m = 6$ cm, $l = AB = 4$ cm;

a) $a_p = ?$ $l = 4$ cm $\Rightarrow OM = 2$ cm $= CM$

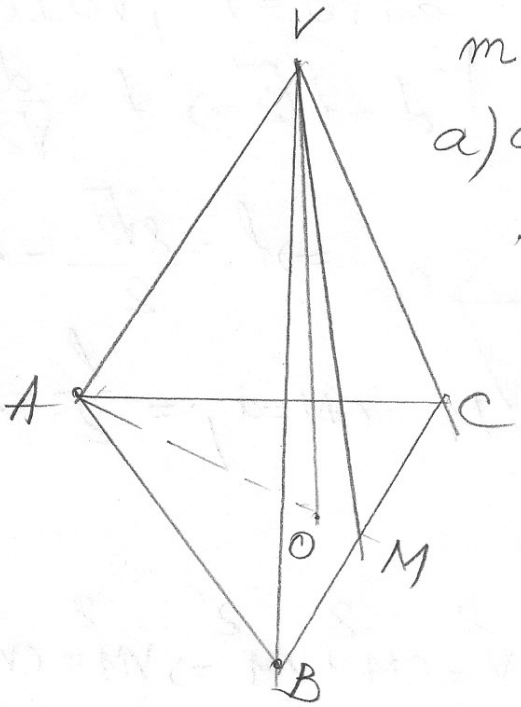
ΔVMC: $CV^2 = m^2 = CM^2 + VM^2 \Rightarrow VM^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4$

$\Rightarrow VM^2 = 32 \Rightarrow VM = 4\sqrt{2}$ cm;

$a_p = 4\sqrt{2}$

$h^2 + a_b^2 = a_p^2 \Rightarrow h^2 = a_p^2 - a_b^2 = 32 - 4 = 28 \Rightarrow h = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm

7/130



$m = 6\sqrt{2}$, $l = 6$ cm

a) $a_p = VM$

ΔVMC dr in M

$CV^2 = CM^2 + VM^2$

$\Rightarrow VM^2 = CV^2 - CM^2$

$= (6\sqrt{2})^2 - 3^2$

$= 72 - 9 = 63$

$\Rightarrow VM = 3\sqrt{7}$ cm $= a_p$

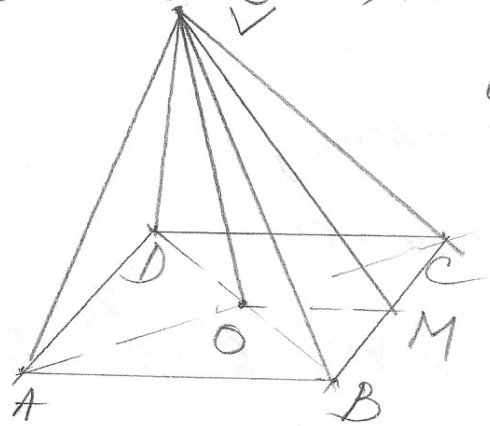
b) ΔVOM

$OM = \frac{1}{3} \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ cm,

$VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow VO^2 = VM^2 - OM^2$

$VO^2 = 63 - 3 \Rightarrow VO^2 = 60 \Rightarrow VO = 2\sqrt{15}$ cm ☐

9/130



$a_p = 4$ cm, $h = 2\sqrt{3}$ cm

ΔVOM:

$VO^2 + OM^2 = VM^2$

$\Rightarrow OM^2 = a_p^2 - h^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2$

$= 16 - 12 = 4$

$OM = 2$ cm $\Rightarrow l = 4$ cm

a) $P_b = 4 \cdot l = 4 \cdot 4 = 16\,cm$;

b) $A_f = 4 \cdot A_{VAB} = 4 \cdot 8 = 32\,cm^2$

$A_{VAB} = \frac{a_p \cdot l}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8\,cm^2$

11/130 $h = 2cm$, $a_p = 2\sqrt{2}\,cm$

$\Rightarrow OM^2 = a_b^2 = a_p^2 - h^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow OM = 2cm$

$OM = \frac{l\sqrt{3}}{6} = 2 \Rightarrow l = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\,cm$

$P_b = 3l = 3 \cdot 4\sqrt{3}\,cm = 12\sqrt{3}\,cm$

$l = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 4$

$h^2 + R^2 = m^2 \Rightarrow m = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,cm$

$P_f = 2 \cdot m + l = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{5} + \sqrt{3})\,cm$ D.

12/130 ABCS tetraedru regulat

a) $l = 6\sqrt{2} \Rightarrow h = ?$

$VM = a_p$; $\Delta VMC: a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$

$a_p^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$; $a_p^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4}$

$a_p^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ (*); $a_p = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$

$a_p = 3\sqrt{6}$

$h^2 + OM^2 = a_p^2$; $R = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow h^2 = a_p^2 - OM^2 = (3\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2 = 9\cdot 6 - 6 = 54 - 6 = 48$

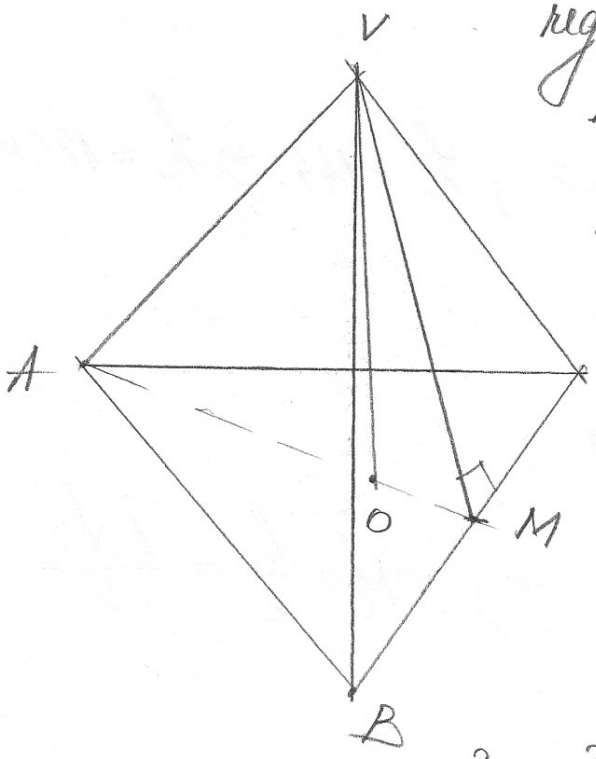
$OM = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{6} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

VABC piramidă triunghiulară regulată, l

ΔABC Δ echilateral

$AM = h_\Delta = \frac{l\sqrt{3}}{2}$



$AO = R$ (raza cercului circumscris)

$l = R\sqrt{3}$ cm $= 5\sqrt{3}$ cm

ΔVMC dr în M: $VM^2 + MC^2 = VC^2$

$VC = m = 13 \Rightarrow VM^2 = VC^2 - CM^2$

$CM = \frac{l}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$: $VM^2 = 13^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 169 - \frac{75}{4} = \frac{676 - 75}{4} = \frac{601}{4}$

ΔVOM: $VO^2 + OM^2 = VM^2$

$\Rightarrow VO^2 = VM^2 - OM^2$

$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow VO^2 = \frac{601}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{601}{4} - \frac{25}{4} = \frac{576}{4}$

$\Rightarrow VO = \sqrt{\frac{576}{4}} = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{4}} = \frac{24}{2} = 12$ cm □

II. FORMULA

$h^2 = m^2 - R^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow h^2 = 169 - 25;\ h^2 = 144 \Rightarrow h = 12\,cm$ □.

Demonstrație

ΔVMC dreptunghic în M

$VM^2 = VC^2 - CM^2$ (1); $VC = m$, $CM = \frac{l}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

ΔVOM dreptunghic în O:

$VO^2 = VM^2 - OM^2$; $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$

$VM^2 = VO^2 + OM^2$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow VC^2 - CM^2 = VO^2 + OM^2$

$\Rightarrow VO^2 = VC^2 - CM^2 - OM^2$

$= m^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$= m^2 - \frac{3R^2}{4} - \frac{R^2}{4} = m^2 - \frac{4R^2}{4}$

$= m^2 - R^2$

$\Rightarrow h^2 = m^2 - R^2 \Rightarrow m^2 = h^2 + R^2$ □

Obs. 1) ΔABC obtuzunghic în A cu $AB = AC < BC$

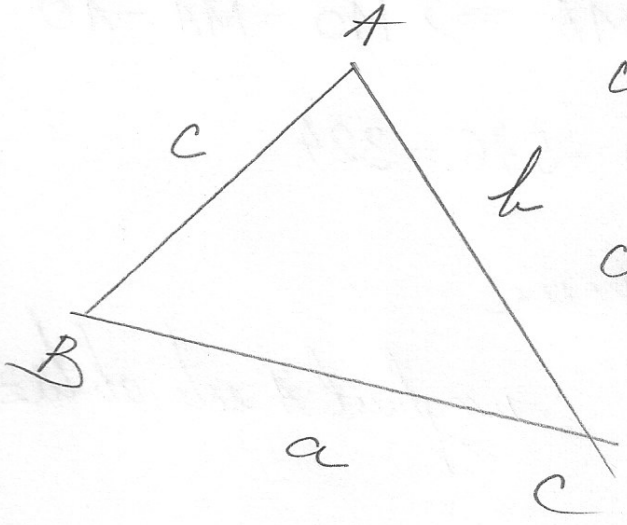
deoarece $AB^2 + AC^2 < BC^2$

2) ΔABC ascuțit unghic

$$AB \leq AC \leq BC \Rightarrow AB^2 + AC^2 \geq BC^2$$

(CARACTERIZARE A TRIUNGHIURILOR)

Reiese din teorema cosinusului:



$$\cos C = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab}$$

$$\cos B = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac}$$

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

sau $-a^2 + b^2 + c^2 = \cos A \cdot 2bc$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$!

$m(\sphericalangle A) > 90^\circ \Rightarrow \cos A < 0$; $-1 < \cos A < 0 \mid \cdot (-2)$

$\Rightarrow 0 < 2\cos A < 2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

EVIDENT