CONDIȚII DE PERPENDICULARITATE A DOUĂ DREPTE

Două drepte d_1 și d_2 sunt perpendiculare,

$d_1 \perp d_2 \iff$

1) Vectorial $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$ ($\vec{v_1}$ vectorul care are dreapta suport d_1 și $\vec{v_2}$ - vectorul care are dreapta suport d_2)

2) cu ajutorul PANTEI: $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$

3) METRIC : RECIPROCA TEOREMEI LUI PITAGORA

Ex. Fie $A(-4,-2)$, $B(2,0)$, $C(-5,1)$. Arătați că $AB \perp AC$.

Vectorial: $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = \left((x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}\right) = (2+4, 0+2) = (6,2)$

$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = (-5+4, 1+2) = (-1,3)$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = -6+6 = 0 \rightarrow AB \perp AC$

ANALITIC : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0+2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - y_A} = \frac{1+2}{-5+4} = -3$

$m_{AB} \cdot m_{AC} = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1 \Rightarrow AB \perp AC$

METRIC Calculați voi AB, AC și BC ($AB = 2\sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = 5\sqrt{2}$)

cu $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

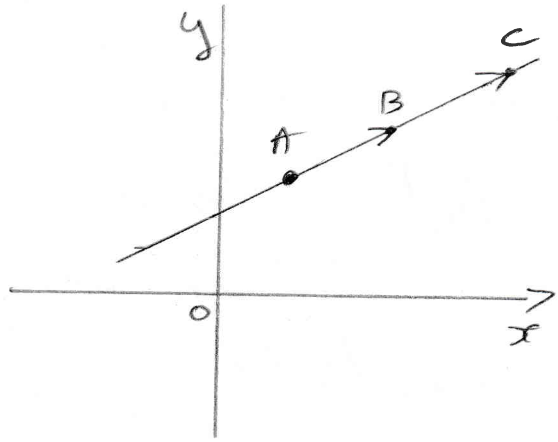
$AB^2 = 40$; $AC^2 = 10$; $BC^2 = 50 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AC$.

COLINIARITATEA A TREI PUNCTE

Considerăm trei puncte în reperul cartezian xOy,

$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$



Punctele A, B, C sunt COLINIARE $\Leftrightarrow$

1) VECTORIAL: $(\exists)\, \alpha \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$

2) CU NR. COMPLEXE: $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}^*$

3) CU AJUTORUL PANTEI: $m_{AB} = m_{AC}$ (observăm că A este comun)

4) METRIC: $AB + BC = AC$.

Ex: Arătați că punctele $A(1,2)$, $B(-5,-1)$, $C(7,5)$ sunt coliniare.

VECTORIAL: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-5,-1) - (1,2) = (-6,-3)$; $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (7,5) - (1,2) =$
$= (6,3)$. Verificăm dacă $(\exists)\, \alpha \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CA}$

$(-6,-3) = \alpha \cdot (6,3) \Leftrightarrow (-6,-3) = (6\alpha, 3\alpha) \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow A, B, C$ - colini

CU NR. COMPLEXE: $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -5 - i$, $z_C = 7 + 5i$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-5 - i - 1 - 2i}{7 + 5i - 1 - 2i} = \frac{-6 - 3i}{6 + 3i} = -1 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow A, B, C \text{ - coliniare}$$

ANALITIC (folosind panta). $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-2}{-5-1} = \dfrac{1}{2}$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-2}{7-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow A, B, C \text{ - coliniare}$$

METRIC: $BA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 3\sqrt{5}$; $AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = 3\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 6\sqrt{5}$

$3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \Rightarrow BA + AC = BC \Rightarrow A$ mijlocul lui $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow A, B, C$ - coliniare. $(B - A - C)$

SINTEZĂ: Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$

Atunci paralelismul dreptelor (AB), (CD) se poate arăta vectorial, cu nr. complexe sau analitic, astfel:

Vectorial: $AB \parallel CD \Leftrightarrow (\exists)\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$

CU NR. COMPLEXE: $AB \parallel CD \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$

Analitic (folosind panta): $AB \parallel CD \Leftrightarrow m_{AB} = m_{CD}$ adică $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$

Ex: Fie în reperul cartezian xOy punctele $A(0,6)$, $B(-4,0)$, $C(2,6)$, $D(0,3)$. Să se arate că dreptele (AB) și (CD) sunt paralele.

METODA VECTORIALĂ: dreptele (AB), (CD) sunt paralele dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari.

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-4-0, 0-6) = (-4; -6)$; $\overrightarrow{CD} = (0-2; 3-6) = (-2, -3)$

Verificăm dacă există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pt. care $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow (-4, -6) = \alpha(-2, -3) \Leftrightarrow (-4, -6) = (-2\alpha, -3\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 2$; $-6 = -3\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow AB \parallel CD$.

METODA CU NUMERE COMPLEXE: Scriem afixele corespunzătoare punctelor A, B, C, D, adică z_A, z_B, z_C, z_D.

$A(0,6) \Rightarrow z_A = 0 + 6i = 6i$; $B(-4,0) \Rightarrow z_B = -4 + 0i = -4$

$C(2,6) \Rightarrow z_C = 2 + 6i$; $D(0,3) \Rightarrow z_D = 0 + 3i = 3i$

Acum: $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \dfrac{-4-6i}{3i-2-6i} = \dfrac{-4-6i}{-2-3i} = {}^{2-3i)}\dfrac{4+6i}{2+3i} = \dfrac{(2-3i)(4+6i)}{(2-3i)(2+3i)} =$

$= \dfrac{8+\cancel{12i}-\cancel{12i}-18i^2}{4-9i^2} = \dfrac{8+18}{4+9} = \dfrac{26}{13} = 2 \in \mathbb{R}^* \; (i^2 = -1) \Rightarrow AB \parallel CD$

METODA ANALITICĂ: (folosim pantele): $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-6}{-4-0} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

$m_{CD} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{3-6}{0-2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow AB \parallel CD$.

CONDIȚII DE PARALELISM A DOUĂ DREPTE ÎN PLAN

TEOREMĂ: Dreptele $d_1: y = m_1 x + n_1$; $d_2: y = m_2 x + n_2$ sunt PARALELE dacă $n_1 \neq n_2$ și au aceeași pantă $m_1 = m_2$.

$$\boxed{d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2,\ n_1 \neq n_2}$$

TEOREMĂ: Dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sunt PARALELE dacă: $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$, $a_2, b_2 \neq 0$.

Obs: Dacă în plus cele două drepte au aceeași ordonată la origine, adică $n_1 = n_2$, atunci ele coincid.

$$\boxed{d_1 = d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ și } n_1 = n_2}$$

sau

$\boxed{d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ coincid dacă } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$ cu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$

Ex: Arătați că dreptele $d_1: 3x + y - 1 = 0$, $d_2: 6x + 2y - 5 = 0$ sunt PARALELE.

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

sau scriem dreptele sub formă explicită $\Rightarrow d_1: y = -3x + 1$

$d_2 = -3x + \frac{5}{2}$ și observăm că $m_1 = m_2 = -3$, $n_1 = 1 \neq n_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 \parallel d_2$