COLEGIUL de ŞTIINŢE ale NATURII
“EMIL RACOVIŢĂ“
Str. Armoniei, nr. 6, Braşov
Tel: 0268.424.084
CUI: 29379248

Examenul de bacalaureat național
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \dots$.

5p **2.** Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2025x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = 6\left(\sqrt{x-2} - 1\right)$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1,2)$ și $C(2,-2)$. Să se determine distanța de la punctul O la dreapta BC .

5p **6.** Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x = \frac{1}{2} + \cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} 16^a & 0 \\ 0 & 9^a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $det(B(a)) = 12^{2a}$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A \cdot B(a) = B(a) \cdot A$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice matrice $X \in M_2(R)$ cu proprietatea că $X \cdot X = B(1)$, suma pătratelor elementelor matricei X este egală cu 25.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2^{x+y+2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $(-2025) * 2023 = 1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(3 - 4x) * (x^2 - 6) = 16$.

5p **c)** Arătați că, dacă $(x * y) * z = 2^{z+6}$, atunci $x = -y$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e\ln x$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

5p b) Arătați că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x > 0$.

5p **c)** Deduceți inegalitatea $e^x \geq x^e$, oricare ar fi $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int (f(x)e^{-x} + e^x)dx$.

5p **b)** Dacă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, determinați punctele de extrem ale funcției F.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$ este o primitivă a funcției f.