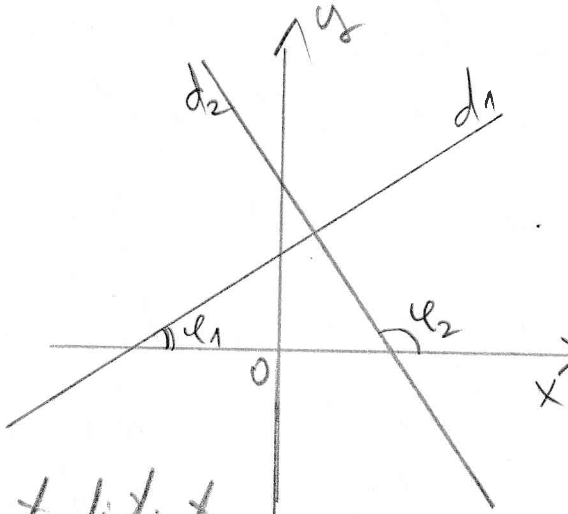
ECUAȚIA DREPTEI ÎN PLAN



PANTA UNEI DREPTE:

Vom prezenta o caracterizare algebrică a punctelor unei drepte, date prin diferite condiții. Știm că o dreaptă este bine determinată de un punct și o direcție dată sau de două puncte distincte.

Una dintre caracteristicile așezării dreptei în plan o constituie înclinarea ei față de axa Ox.

În figura de mai sus, am desenat două drepte d_1 și d_2 care formează cu axa Ox unghiuri de măsuri φ_1 și respectiv φ_2, măsurate în sens trigonometric. Primul unghi este ascuțit, iar al doilea este obtuz. $\varphi_1 \in (0°; 90°)$, iar $\varphi_2 \in (90°; 180°)$

Def: Se numește coeficient unghiular al unei drepte sau PANTA DREPTEI, tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu axa Ox. Notație: pt $\varphi \in [0, 180°] \setminus \{90°\}$, notăm panta cu $m = tg\alpha$

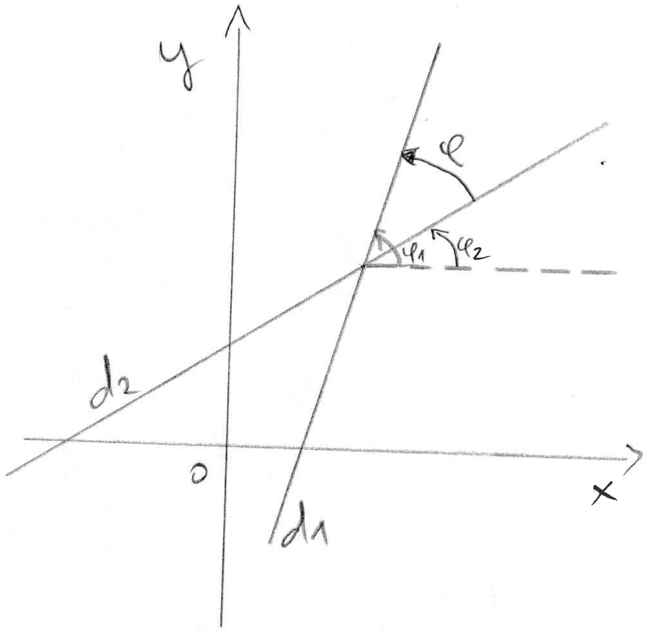
Dacă $\varphi = 90°$, tangenta nu este definită ($\cos 90° = 0$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ NU are sens). În acest caz, dreapta este paralelă cu axa Oy

PANTA UNEI DREPTE: Panta dreptei care trece prin două puncte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $x_A \neq x_B$ este egală cu: $\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Ex: Să se scrie dreptele pantelor determinate de punctele $A(3,1)$; $B(6,3)$ și respectiv punctele $C(2,4)$, $D(5,1)$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{6-3} = \frac{2}{3} > 0$ (ceea ce arată că dreapta „urcă", dacă x crește, deci unghiul format de dreaptă cu axa Ox este ascuțit.

$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{1-4}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1 < 0$ (ceea ce arată că dreapta „coboară" când x crește, iar unghiul format de dreaptă cu axa Ox este obtuz.



UNGHIUL A DOUĂ DREPTE

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow tg\,\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) =$$

$$= \frac{tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2}{1 + tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2} = \frac{m_{d_1} - m_{d_2}}{1 + m_{d_1} \cdot m_{d_2}},\ \text{unde}$$

$m_{d_1} = tg\,\varphi_1$, $m_{d_2} = tg\,\varphi_2$ sunt pantele dreptelor d_1 și respectiv d_2.

Def. Tangenta unghiului φ a două drepte are expresia:

$$tg\,\varphi = \left| \frac{m_{d_1} - m_{d_2}}{1 + m_{d_1} \cdot m_{d_2}} \right|$$

CAZURI PARTICULARE:

1) Condiția ca două drepte să fie perpendiculare:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$$

2) Condiția ca două drepte să fie paralele:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$$

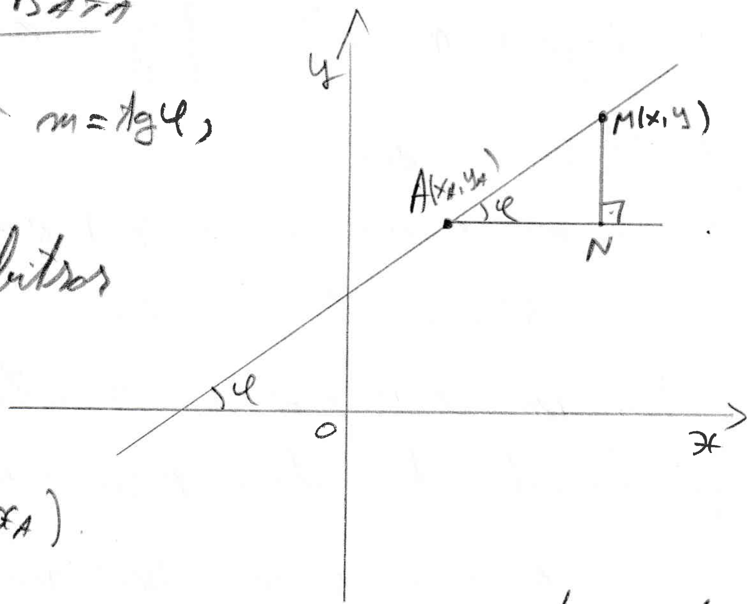
Aplicații: 1) În planul cartezian se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(4,-1)$. Arătați că dreptele AB și AC sunt perpendiculare.

Indicație: Calculați pantele lor și verificați dacă produsul este -1.

2) Arătați că dacă $A(2,3)$, $B(3,7)$, $C(8,9)$, $D(7,5)$, atunci ABCD este paralelogram.

Indicație: Arătăm că laturile opuse sunt paralele. ($AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$)

ECUAȚIA UNEI DREPTE DETERMINATĂ DE UN PUNCT ȘI O DIRECȚIE DATĂ



Fie $A(x_A, y_A)$ și o dreaptă de pantă $m = tg\varphi$, care trece prin A.

Considerăm $M(x, y)$ un punct arbitrar al dreptei.

$m(\sphericalangle MAN) = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$

TEOREMĂ: Ecuația dreptei care trece prin $A(x_A, y_A)$ și are panta m este:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Obs: 1) Ecuația dreptei este o ecuație de gradul întâi în x și y

2) Un punct $B(x_B, y_B)$ aparține dreptei dacă verifică ecuația dreptei, adică pentru $x = x_B$, $y = y_B$ se verifică $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$

Ex: Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin $A(-3, 5)$ și are panta $m = \dfrac{1}{3}$.

Ec. dreptei este: $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{3}(x - (-3))$

$\Rightarrow {}^{3)}y - {}^{3)}5 = \frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow 3y - 15 = x + 3 \Rightarrow -x + 3y - 18 = 0$ sau

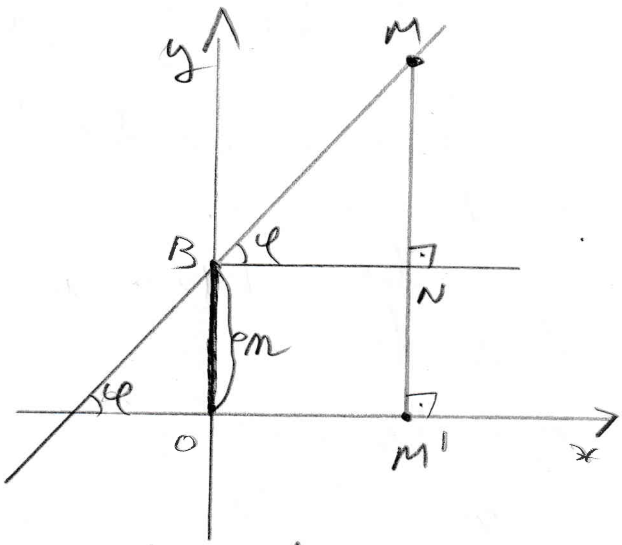
$x - 3y + 18 = 0$.

ECUAȚIA EXPLICITĂ A UNEI DREPTE:

Ne propunem să scriem ecuația dreptei, în reperul cartezian xOy, când se cunosc:

- mărimea segmentului pe care dreapta îl determină pe axa Oy (această valoare o notăm cu n și o numim ordonata la origine a dreptei
- panta dreptei (m).

TEOREMĂ: Ecuația dreptei, de pantă m și având ordonata la origine n, este: $\boxed{y = mx + n}$.



CAZURI PARTICULARE:

1) Dacă $m=1$, $n=0 \Rightarrow y=x$ reprezintă ecuația PRIMEI BISECTOARE

2) Dacă $m=-1$, $n=0 \Rightarrow y=-x$ este ecuația celei de a doua BISECTOARE

3) Dacă $n=0 \Rightarrow y=mx$ reprezintă ec. unei drepte care trece prin origine.

4) $y=0$ este ec. axei Ox, iar ecuația $x=0$ este ecuația axei Oy.

Ex: Să se scrie ec. dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ și este paralelă cu dreapta $y=3x+5$.

Sol I: Ec. dreptei căutate este $y=mx+n$.

Aceasta este paralelă cu $y=3x+5 \Rightarrow m=3$.

A se află pe dreaptă $\Rightarrow -2=3\cdot 1+n \Rightarrow n=-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. dreptei căutate este: $y=3x-5$

Sol II: Dreapta căutată este paralelă cu $y=3x+5 \Rightarrow m=3$

Ec. dreptei dacă știm $A(1,-2)$ și panta $m=3$ este:

$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y+2=3(x-1) \Rightarrow y+2=3x-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=3x-3-2 \Rightarrow y=3x-5$.

Aplicații, manual, pag 335 nr. 18, 21, 24-a