OPERAȚII CU VECTORI LEGAȚI

COORDONATELE UNUI VECTOR ÎN PLAN

EGALITATEA A DOI VECTORI LEGAȚI:

Def: Fie $\vec{r_1}=(x_1,y_1)$ și $\vec{r_2}=(x_2,y_2)$ doi vectori legați. Cei doi vectori sunt egali și scriem $\vec{r_1}=\vec{r_2}$ dacă $x_1=x_2$ și $y_1=y_2$.
(Vectorii sunt egali, dacă pe componente, coincid)

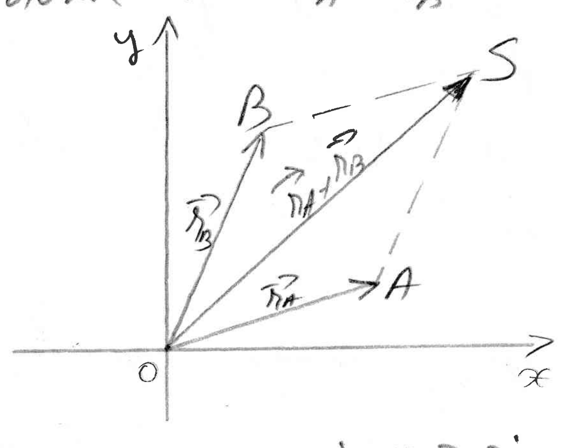
Obs: Vectorilor $\vec{r_1}$ și $\vec{r_2}$ le corespund nr. complexe $z_1=x_1+y_1 i$, $z_2=x_2+y_2 i$. Aceste numere sunt egale $\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ și $y_1=y_2$

Ex: Fie vectorii legați $\vec{r_1}=2a\vec{i}+7\vec{j}$, $\vec{r_2}=4\vec{i}+b\vec{j}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Să se determine a și b astfel încât vectorii să fie egali.

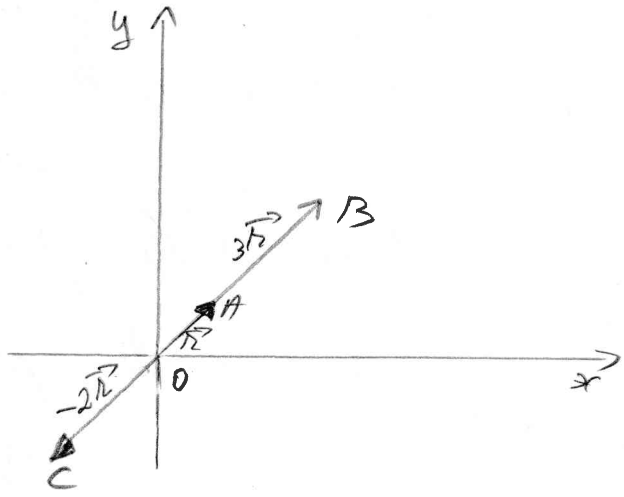
$\vec{r_1}=\vec{r_2} \Leftrightarrow 2a=4 \;;\; 7=b \quad \Rightarrow a=2,\ b=7$.

ADUNAREA A DOI VECTORI LEGAȚI:

TEOREMĂ: Suma a doi vectori legați $\vec{r_A}=(x_A,y_A)$, $\vec{r_B}=(x_B,y_B)$ este vectorul notat $\vec{r_A}+\vec{r_B}$ având coordonatele $(x_A+x_B,\ y_A+y_B)$.



ADUNAREA A DOI VECTORI



ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR CU UN SCALAR.

ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR LEGAT CU UN SCALAR:

TEOREMĂ: Înmulțirea vectorului legat $\vec{r}=(x,y)$ cu scalarul $\alpha\in\mathbb{R}$ este vectorul notat $\alpha\cdot\vec{r}$ având coordonatele $(\alpha x, \alpha y)$

Ex: 1) Fie vectorii $\vec{r_A}=(3,-5)$ $\vec{r_B}=(-2,3)$. Calculați $\vec{r_A}+\vec{r_B}$

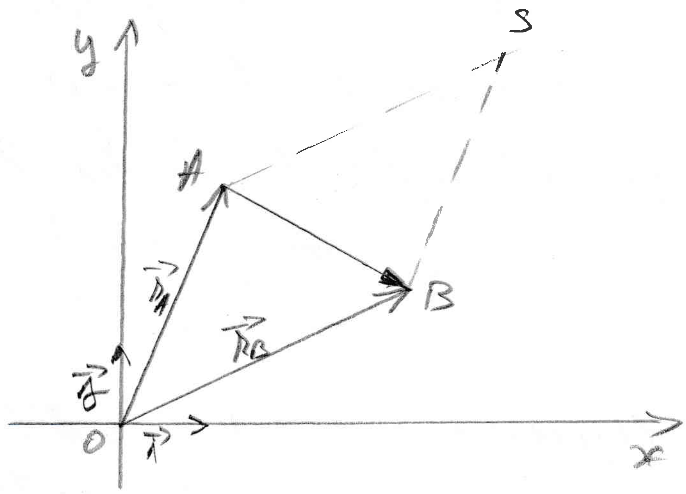
$\vec{r_A}+\vec{r_B} = (3-2\,;\,-5+3)=(1,-2)=1\vec{i}-2\vec{j}$

2) Se consideră în plan punctele A, B, C având vectorii de poziție: $\vec{r_A}=(2,-3)$, $\vec{r_B}=(-3,4)$, $\vec{r_C}=(3,5)$. Să se precizeze coordonatele punctelor M, N, P a.î. $\vec{r_M}=2\vec{r_A}-3\vec{r_B}$; $\vec{r_N}=5\vec{r_C}$, $\vec{r_P}=2\vec{r_A}+3\vec{r_B}-5\vec{r_C}$.

$\vec{r_M}=2\cdot(2,-3)-3(-3,4)=(4,-6)-(-9,12)=(13,-18) \Rightarrow$

$\Rightarrow M(13,-18)$. Celelalte două exemple vă rog să le rezolvați voi.

COORDONATELE UNUI VECTOR ÎN PLAN:



TEOREMĂ Coordonatele vectorului $\vec{AB}$ în baza ortonormată $(\vec{i},\vec{j})$ sunt: (x_B-x_A, y_B-y_A) $[\vec{AB}=\vec{r_B}-\vec{r_A}]$

$\vec{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A)$, adică, din coordonatele vârfului B se scad coordonatele originii A.

Obs: 1) Modulul vectorului $\vec{AB}$ este egal cu $|\vec{AB}|=\sqrt{(x_B-y_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, chiar distanța dintre două puncte A, B în plan.

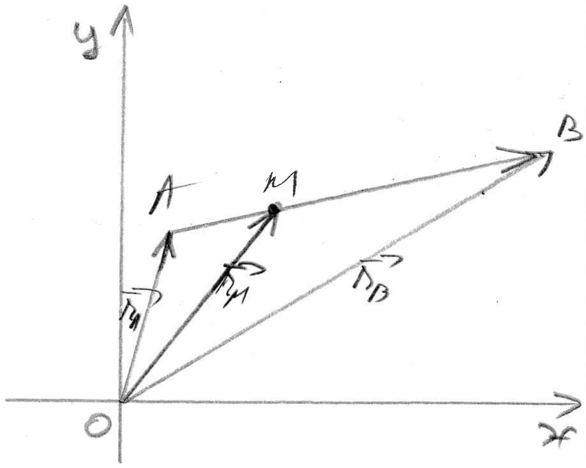
2) Se observă că segmentul $[AB]$ reprezintă a doua diagonală a paralelogramului OBSA.

Ex. Fie A, B, C trei puncte în plan, având vectorii de poziție $\vec{r_A}=(2,-3)$, $\vec{r_B}=(-3.1)$, $\vec{r_C}=(-2,-5)$. Determinați vectorii $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$.

$\vec{AB}=\vec{r_B}-\vec{r_A}=(-3,1)-(2,-3)=(-5,4)$.

Ceilalți doi vectori vă rog să îi determinați voi.

ÎMPĂRȚIREA UNUI SEGMENT ÎNTR-UN RAPORT DAT:



Fie segmentul $[AB]$ și M punctul pe acest segment pentru care $\frac{AM}{MB}=k \Rightarrow \vec{AM}=k\cdot\vec{MB}$.

Exprim această egalitate folosind vectorii de poziție ai punctelor A, M, B.

Avem: $\vec{AM}=k\cdot\vec{MB} \Rightarrow \vec{r}_M-\vec{r}_A=k(\vec{r}_B-\vec{r}_M) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_M-x_A)\vec{i}+(y_M-y_A)\vec{j}=k[(x_B-x_M)\vec{i}+(y_B-y_M)\vec{j}]$

Folosind egalitatea vectorilor $\Rightarrow x_M-x_A=k(x_B-x_M)$ și $y_M-y_A=k(y_B-y_M) \Rightarrow x_M=\frac{x_A+kx_B}{1+k}$, $y_M=\frac{y_A+ky_B}{1+k}$

$\Rightarrow$ vectorul de poziție al vectorului M este $\vec{r}_M=x_M\vec{i}+y_M\vec{j} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{r}_M=\frac{1}{1+k}\cdot\vec{r}_A+\frac{k}{1+k}\vec{r}_B$.

TEOREMĂ: Coordonatele vectorului de poziție ale punctului $M(x_M, y_M)$ care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\frac{AM}{MB}=k$, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ sunt:

$$x_M=\frac{x_A+k\cdot x_B}{1+k}, \quad y_M=\frac{y_A+k\cdot y_B}{1+k}$$

Demonstrația teoremei a fost făcută mai sus.

Obs. 1) Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, $k=1$, atunci $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$; $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

2) Într-un $\triangle ABC$, cu $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, iar $G(x_G, y_G)$ este centrul său de greutate. Atunci avem:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \; ; \; y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Vă rog să justificați prin calcul cele două observații.