Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Observă și descoperă!

1. Sara și Victor încearcă să găsească două numere reale, astfel încât, punând pe unul dintre ele în locul lui x și pe celălalt în locul lui y, egalitatea $2x + y = 6$ să devină adevărată.

Numerele -1 și 8 fac ca egalitatea să fie adevărată.
$2 \cdot (-1) + 8 = 6$ este o egalitate adevărată.

Numerele 4 și -2 fac ca egalitatea să fie adevărată.
$2 \cdot 4 + (-2) = 6$ este o egalitate adevărată.

a) Care dintre cei doi copii are dreptate?

b) Găsește și alte perechi de numere care să facă egalitatea adevărată.

c) Câte astfel de perechi crezi că există?

d) Verifică dacă numerele a și $6 - 2a$, unde a este un număr real oarecare, puse în locul lui x, respectiv y fac ca egalitatea să fie adevărată.

Important

• O ecuație de forma $ax + by = c$, în care a, b și c sunt numere reale date, $a \neq 0$ și $b \neq 0$ se numește **ecuație liniară cu două necunoscute**.

• Prin **soluție** a ecuației liniare cu două necunoscute înțelegem orice pereche (m, n) de numere reale cu proprietatea că înlocuind pe x cu m și pe y cu n obținem o egalitate adevărată.

• O ecuație liniară cu două necunoscute are o infinitate de soluții.

• Un ansamblu de două astfel de ecuații se numește **sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute**.

• Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute se scrie $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sunt numere reale date.

• Prin **soluție** a unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute înțelegem o pereche (m, n) de numere reale cu proprietatea că, înlocuind pe x cu m și pe y cu n, obținem două egalități adevărate.

Exemplu: Perechea $(1, 4)$ *este soluție a sistemului de ecuații* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$, *deoarece* $2 \cdot 1 + 4 = 6$ *este o egalitate adevărată și* $1 + 4 = 5$ *este de asemenea o egalitate adevărată. Perechea* $(3, 0)$ *nu este soluție a sistemului* $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$ *deoarece* $2 \cdot 3 + 0 = 6$ *este o egalitate adevărată, iar* $3 + 0 = 5$ *este o egalitate falsă.*

• **A rezolva un sistem** înseamnă să îi determinăm soluțiile, urmând o schemă logică.

• Două sisteme de ecuații se numesc **echivalente** dacă au aceleași soluții. În acest caz scriem $S_1 \Leftrightarrow S_2$ și citim „sistemul unu este echivalent cu sistemul doi".

Exemplu: $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=11 \\ x+y=5 \end{cases}$ *Ambele au ca soluție perechea* $(1,4)$. *Verifică!*

• Avem două metode pentru a obține un sistem de ecuații echivalent cu un sistem de ecuații dat.

▷ Înmulțim fiecare ecuație a sistemului dat cu un număr arbitrar, diferit de zero. Obținem un sistem de ecuații echivalent cu sistemul dat.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \,|\cdot m \\ a_2x+b_2y=c_2 \,|\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ma_1x+mb_1y=mc_1 \\ na_2x+nb_2y=nc_2 \end{cases}$$

Exemplu: $\begin{cases} 2x+3y=14 \,|\cdot 2 \\ 3x-2y=-5 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=28 \\ 9x-6y=-15 \end{cases}$ *Ambele sisteme au soluția* $(1,4)$. *Verifică!*

▷ Înlocuim una dintre ecuațiile sistemului cu ecuația obținută prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații inițiale. Obținem un sistem echivalent cu sistemul dat.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y=c_1+c_2 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Exemplu: $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 3x-2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y=9 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$ *Ambele au soluția* $(1,4)$. *Verifică!*

Exersează!

2. Verifică dacă perechea de numere reale $(x,y)=(-1,5)$ este soluţie a următoarelor ecuaţii:
a) $3x-y=-8$; b) $-4x+3y=19$; c) $3x+y=8$; d) $2x+y=3$.

3. Verifică dacă perechea de numere reale $(x,y)=(3,4)$ este soluţie a sistemelor de ecuaţii:
a) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ x+2y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+2y=-5 \\ 3x+y=13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+3y=6 \\ x-y=-1 \end{cases}$

4. Completează spaţiile libere, astfel încât fiecare ecuație din primul sistem de ecuații să fie echivalentă cu o ecuație din al doilea sistem de ecuații.

a) $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ x+y=8 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 6x-...y=... \\ ...x+3y=... \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+y=11 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x+...y=22 \\ 8x+...y=... \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 5x-y=1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x+30y=... \\ ...x-...y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x+y=7 \\ 4x-5y=-1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ...x+...y=14 \\ 12x+...y=... \end{cases}$

Model: a) $6x:3x=2$, *deci prima relaţie a fost înmulţită cu 2.* $3y:y=3$, *deci a doua relaţie a fost înmulţită cu 3.* $\begin{cases} 3x-2y=9 \,|\cdot 2 \\ x+y=8 \,|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4y=18 \\ 3x+3y=24 \end{cases}$

5. Se consideră ecuația $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=\sqrt{6}$.
a) Dacă $x=\sqrt{3}$, determină numărul real y. b) Dacă $x=0$, determină numărul real y.
c) Dacă $y=0$, determină numărul real x. d) Dacă $y=\sqrt{2}$, determină numărul real x.

6. Se consideră ecuația $x\sqrt{5}+y\sqrt{7}=\sqrt{245}$. Determină câte o soluție a ecuației exprimată prin: a) numere naturale; b) numere iraționale.